11/12/2015

Κλειστός Τύπος ή Κανόνας Newton-Cotes

Έστω $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ και $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.
Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a,b]$ $x_i = a + ih$ για $i=0,1,\dots,n$
όπου $h = \frac{b-a}{n}$. Προφανώς $x_0 = a$ και $x_n = b$. Τότε

$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$. Για τον υπολογισμό των
w_i για $i=0,1,\dots,n$ ολοκληρώνουμε το πολ/μο παρεμβολής
$P_n \in \mathbb{P}_n$ στα σημεία x_i $i=0,1,\dots,n$

$$Q_{n+1}(f) = I(P_n) = \int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \left(L_0(x) f(x_0) + \dots + L_n(x) f(x_n)\right) dx =$$

$$f(x_0) \cdot \int_a^b L_0(x)\,dx + f(x_1) \int_a^b L_1(x)\,dx + \dots + f(x_n) \int_a^b L_n(x)\,dx$$

Επομένως $\boxed{w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx}$ $i=0,1,\dots,n$ και είναι $w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx = \int_a^b \prod_{j=0}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx$

Γνωρίζουμε ότι $x_i = a+ih$ και το $x\in[a,b]$, γράφεται ως $x=a+sh$ όπου $s\in[0,n]\subseteq\mathbb{R}$. Τότε $w_i = \int_a^b \prod_{j=0}^{n} \frac{a+sh-(a+jh)}{a+ih-(a+jh)}\,d(a+sh) =$

$$= h\int_0^n \prod_{j=0}^{n} \frac{s-j}{i-j}\,ds$$ → Ανεξάρτητο του διαστήματος $[a,b]$
Θα μπορούσαμε να το πάρουμε και στο $[b,a]$

Τα w_i τοποθετούνται συμμετρικά στον τύπο ολοκλήρωσης.
Δηλαδή $w_{n-i}=w_i$

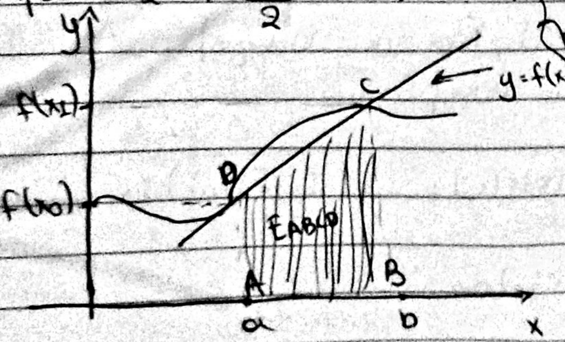
$w_{n-i} = h\int_0^n \prod_{j=0}^{n} \frac{s-j}{n-i-j}\,ds$ Θεωρώ τη μεταβλητή $t=n-s \Rightarrow s=n-t$. Τότε

$$w_{n-i} = h\int_0^n \prod_{j=0}^{n} \frac{n-t-j}{n-i-j}\,d(n-t) = -h\int_0^n \prod_{j=0}^{n} \frac{t-(n-j)}{i-(n-j)}\,dt = h\int_0^n \prod_{l=0}^{n} \frac{t-l}{i-l}\,dt = w_i$$
όπου $l=n-j$

$\boxed{n=1}$ Τύπος ή κανόνας του τραπεζίου
$[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ $x_0=a$, $x_1=b$ $h=b-a$

Τότε $Q_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$ και είναι $w_0 = h\int_0^1 \frac{s-1}{0-1}\,ds = -h\int_0^1 (s-1)\,ds$
$= -h\left[\frac{s^2}{2}-s\right]_0^1 = \frac{h}{2} = w_1$ λόγω συμμετρίας
=

Άρα $Q_2(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right)$ Ο τύπος αυτός είναι ακριβής για όλα τα πολυώνυμα 1ου βαθμού



$Q_2(f) = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot h = E_{\text{τραπεζίου}}(ABCD)$

$\boxed{n=2}$ Τύπος ή Κανόνας Simpson

$x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, $h = \frac{b-a}{2}$

$$w_0 = h\int_0^2 \frac{(s-1)(s-2)}{(0-1)(0-2)}ds = \frac{h}{2}\int_0^2 (s^2-3s+2)ds = \frac{h}{2}\left[\frac{s^3}{3} - \frac{3s^2}{2} + 2s\right]_0^2 = \frac{h}{3}$$

και $$w_1 = h\int_0^2 \frac{s(s-2)}{(1-0)(1-2)} = -h\int_0^2 (s^2-2s)ds = -h\left[\frac{s^3}{3} - s^2\right] = \frac{4h}{3}$$

και $w_2 = w_0 = \frac{h}{3}$ (λόγω συμμετρίας) Άρα $Q_3(f) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$

(Ο τύπος αυτός είναι ακριβής για όλα τα πολ/μα 2ου βαθμού αφού ολοκληρώνει το πολ/μο παρεμβολής $P_2 \in \mathbb{P}_2$. Όμως αποδεικνύεται (*) ότι είναι ακριβής και για όλα τα πολ/μα 3ου βαθμού! (σε αυτή την περίπτωση έχουμε πολλά ευρήματα)

και τότε $Q_3(P_3) = Q_3(a_3x^3 + P_2(x)) \overset{Q_3 \text{ γρ τελεστής}}{=} a_3 Q_3(x^3) + Q_3(P_2(x)) =$

$= a_3 I(x_3) + I(P_2(x)) = I(a_3x^3 + P_2(x)) = I(P_3(x))$

Άρα έχουμε: για $f(x) = x^3$: $\int_a^b x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{(a+2h)^4 - a^4}{4} =$

$\frac{1}{4}\left(8a^3h + 6a^2(2h)^2 + 4a(2h)^3 + (2h)^4\right) = \frac{1}{4}\left(8a^3h + 24a^2h^2 + 32ah^3 + 16h^4\right) =$

$= 2a^3h + 6a^2h^2 + 8ah^3 + 4h^4$

και $Q_3(x^3) = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)) = \frac{h}{3}(a^3 + 4(a+h)^3 + (a+2h)^3) =$

$= \frac{h}{3}(a^3 + 4a^3 + 12a^2h + 12ah^2 + 4h^3 + a^3 + 6a^2h + 12ah^2 + 8h^3) = 2a^3h + 6a^2h^2 +$

$+ 8ah^3 + 4h^4 \Longrightarrow \int_a^b x^3 dx = Q_3(x^3)$

$\boxed{n=3}$ Τύπος ή Κανόνας των 3/8

$x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = a+2h$, $x_3 = a+3h = b$ όπου $h = \frac{b-a}{3}$

$Q_4(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$

$$w_0 = h\int_0^3 \frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}ds = -\frac{h}{6}\int_0^3 (s^3 - 6s^2 + 11s - 6)ds = -\frac{h}{6}\left[\frac{s^4}{4} - 2s^3 + \frac{11s^2}{2} - 6s\right]$$

$$= -\frac{h}{6}\left(\frac{81}{4} - \frac{216}{4} + \frac{198}{4} - \frac{72}{4}\right) = -\frac{h}{24}(279 - 288) = \frac{9h}{24} = \frac{3h}{8}$$

Επ. $w_1 = h\int_0^3 \frac{s(s-2)(s-3)\,ds}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{9h}{8}$ (μετά τις πράξεις) $\left.\begin{array}{l} w_2 = w_1 = \frac{9h}{8} \\ w_3 = w_0 = \frac{3h}{8} \end{array}\right\}$ λόγω συμμετρίας

Γ. Άρα $\boxed{Q_4(f) = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right)}$

(Ο τύπος αυτός είναι ακριβής για όλα τα πολ/μα 3ου βαθμού)

14/12/2015

Παράσταση σφάλματος του τύπου του τραπεζίου

Έστω $f \in C^2[a,b]$ τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω το σφάλμα $R_2(f) = I(f) - Q_2(f)$ να παριστάνεται ως $R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\xi)$.

Σύνθετος τύπος τραπεζίου

Έστω $f \in C[a,b]$ θεωρούμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$: $x_0, x_1, \dots, x_n$, όπου $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$ και $h = \frac{b-a}{n}$. Τότε, ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου $Q^T_{n+1}(f)$, προκύπτει απ' το άθροισμα των απλών τύπων του τραπεζίου σε κάθε υποδιάστημα: $Q^T_{n+1}(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$

Ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου έχει σφάλμα $O(h^2)$

Παράσταση σφάλματος του τύπου Simpson

Έστω $f \in C^4[a,b]$, τότε για το σφάλμα του Simpson έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b)$ τ.ω $R_3(f) = I(f) - Q_3(f) = -\frac{(b-a)^4}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi)$

16/12/2015

Σύνθετος τύπος ή κανόνας του Simpson

Έστω n: άρτιος, $f \in C[a,b]$ και η ομοιόμορφη διαμέριση $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$ Τότε ο σύνθετος τύπος του Simpson προκύπτει αν αθροίσουμε τους απλούς τύπους στα διαστήματα $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_n]$ και θα είναι

$$Q^S_{n+1}(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + \frac{h}{3}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right) + \dots + \frac{h}{3}\left(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) = \boxed{\frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)}$$